Ejercicio 13 de la relación de problemas. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficienes en $\mathbb{Z}_5$. Se pide:

a) Demostrar que el polinomio x^3 y sus tres primeras derivadas forman una base de V.

b) Sea W el subespacio generado por los vectores $1+3x+5x^2$, $-1+2x^2$ y $3+3x+x^2$. Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implicitas de W.

c) Sea U el subespacio generado por los vectores $1+x^2$ y $1-x^2$. Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implicitas de U. ¿Pertenecen los polinomios $1+x$ y $1+5x^2$ a U?

a) Sea el conjunto formado por x^3 y sus tres primeras derivadas, tras pasar los coeficientes a $\mathbb{Z}_5$:

$$S = \{x^3, 3x^2, x, 1\}$$

Como sabemos que el espacio vectorial $V = P_3(\mathbb{Z}_5)$ de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ es de dimensión 4 y S está formado por 4 vectores, sólo tenemos que ver que estos vectores son linealmente independientes. Para ellos usamos sus coordenadas respecto de la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$x^3 = (0,0,0,1)$$
$$3x^2 = (0,0,3,0)$$
$$x = (0,1,0,0)$$
$$1 = (1,0,0,0)$$

Ahora construimos la matriz cuyas filas (o columnas) son las coordenadas de tales vectores y calculamos su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-3) = 3$$

Luego el rango de A es 4 y por tanto, los vectores de S son linealmente independientes. Es decir, S es una base de $P_3(\mathbb{Z}_5)$.

b) Sea W = L({1+3x, 4+2x^2 y 3+3x+x^2}) (nótese que hemos reducido los coeficientes a $\mathbb{Z}_5$), el subespacio generado por estos tres polinomios. Para obtener una base basta con eliminar aquellos que sean linealmente dependientes del resto. Para ello de nuevo obtengo las coordenadas respecto de la base canónica:

$$1 + 3x = (1, 3, 0, 0)$$
$$4+2x^2 = (4, 0, 2, 0)$$
$$3+3x+x^2 = (3, 3, 1, 0)$$

Ahora construimos la matriz cuyas filas (o columnas) son las coordenadas de tales vectores y calculamos su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al tener una columna de cero, esta no nos valdrá para encontrar el rango 3, así que tomamos el único menor de orden 3 que puede ser no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 6 - 12 = 0$$

Por tanto, el rango de la matriz A es menor que 3, de hecho, es 2 ya que la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante distinto de cero. Esto nos dice que sólo los dos primeros vectores son linealmente independientes.

Es decir, la base de W es $B_W = \{(1,3,0,0), (4,0,2,0)\}$ en coordenadas respecto de la base canónica o bien como polinomios $B_W = \{1 + 3x, 4 + 2x^2\}$.

Si un vector genérico de W es el polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, cuyas coordenadas con respecto a la base canónica son (a_0, a_1, a_2, a_3), las ecuaciones paramétricas se obtienen igualando lo anterior a una combinación lineal de los vectores de la base B_W e igualando coordenada a coordenada:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ a_1 &= 3\lambda_1 \\ a_2 &= 2\lambda_2 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas se obtiene, por ejemplo, eliminando parámetros, si despejamos λ_1 y λ_2 en la segunda y tercera paramétrica y la despejamos en la primera, obtenemos la primera ecuación implícita,

Por otra parte, cualquier paramétrica en la que no aparezcan parámetros también será una implícita:

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{3}, \lambda_2 = \frac{a_2}{2} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= \frac{a_1}{3} + 2a_2 \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3a_0 - a_1 - 2a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$